

## Lógica de enunciados

### Reglas derivadas demostradas

#### Reglas derivadas de la implicación ( $\rightarrow$ )

*Silogismo Hipotético (SH)*

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

- |                                    |                          |
|------------------------------------|--------------------------|
| 1) $A \rightarrow B$               | $\vdash A \rightarrow C$ |
| 2) $B \rightarrow C$               |                          |
| 3.- $A$                            |                          |
| 4.- $B$ _____ MP 1, 3              |                          |
| 5.- $C$ _____ MP 2, 4              |                          |
| 6.- $A \rightarrow C$ _____ TD 3-5 |                          |

*Mutación (Mut)*

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

- |  |  |
|--|--|
| 1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$               | $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ |
| 2.- $B$  |  |
| 3.- $A$  |  |
| 4.- $B \rightarrow C$ _____ MP 1, 3                |  |
| 5.- $C$ _____ MP 2, 4                              |  |
| 6.- $A \rightarrow C$ _____ TD 3-5                 |  |
| 7.- $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ _____ TD 2-6 |  |

*Identidad (Id.)*

$$\frac{A}{A}$$

- |                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| 1) $A$                                | $\vdash A$ |
| 2.- $\neg A$                          |            |
| 3.- $A \wedge \neg A$ _____ Prod 1, 2 |            |
| 4.- $\neg\neg A$ _____ Abs 2-5        |            |
| 5.- $A$ _____ DN 4                    |            |

*Carga de Premisas (Cpr)*

$$\frac{A}{B \rightarrow A}$$

- |                                      |                          |
|--------------------------------------|--------------------------|
| 1) $A$                               | $\vdash B \rightarrow A$ |
| 2.- $B$                              |                          |
| 3.- $\neg A$                         |                          |
| 4.- $A \wedge \neg A$ _____ Prod 1,3 |                          |
| 5.- $\neg\neg A$ _____ Abs 3-4       |                          |
| 6.- $A$ _____ DN 5                   |                          |
| 7.- $B \rightarrow A$ _____ TD 2-6   |                          |

Reglas derivadas de la negación ( $\neg$ )

Contraposición 1 (Cp<sub>1</sub>)

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

- 1)  $A \rightarrow B$   
 2.-  $\neg B$   
 3.-  $A$   
 4.-  $B$  \_\_\_\_\_ MP 1,3  
 5.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod 2, 4  
 6.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 3-5  
 7.-  $\neg B \rightarrow \neg A$  \_\_\_\_\_ TD 2-6

$$\vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

Contraposición 2 (Cp<sub>2</sub>)

$$\frac{A \rightarrow \neg B}{B \rightarrow \neg A}$$

- 1)  $A \rightarrow \neg B$   
 2.-  $B$   
 3.-  $A$   
 4.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_ MP 1,3  
 5.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod 2,4  
 6.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 3-5  
 7.-  $B \rightarrow \neg A$  \_\_\_\_\_ TD 2-6

$$\vdash B \rightarrow \neg A$$

Contraposición 3 (Cp<sub>3</sub>)

$$\frac{\neg A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow A}$$

- 1)  $\neg A \rightarrow B$   
 2.-  $\neg B$   
 3.-  $\neg A$   
 4.-  $B$  \_\_\_\_\_ MP 1,3  
 5.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod 2,4  
 6.-  $\neg \neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 3-5  
 7.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN 6  
 8.-  $\neg B \rightarrow A$  \_\_\_\_\_ TD 2-7

$$\vdash \neg B \rightarrow A$$

Contraposición 4 (Cp<sub>4</sub>)

$$\frac{\neg A \rightarrow \neg B}{B \rightarrow A}$$

- 1)  $\neg A \rightarrow \neg B$   
 2.-  $B$   
 3.-  $\neg A$   
 4.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_ MP 1,3  
 5.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod 2,4  
 6.-  $\neg \neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 3-5  
 7.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN 6  
 8.-  $B \rightarrow A$  \_\_\_\_\_ TD 2-7

$$\vdash B \rightarrow A$$

Modus Tollens (MT)  
 $A \rightarrow B$   
 $\neg B$   


---

 $\neg A$

- $\neg A$
- 1)  $A \rightarrow B$
  - 2)  $\neg B$
  - 3.-  $A$
  - 4.-  $B$  \_\_\_\_\_ MP 1,3
  - 5.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod 2,4
  - 6.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 3-5

Introducción de la doble negación (IDN)  
 $A$   


---

 $\neg\neg A$

- 1)  $A$   $\neg\neg A$
- 2.-  $\neg A$
  - 3.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod 1,2
  - 4.-  $\neg\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 2-3

Principio de No Contradicción (PNC)  
 $\neg(A \wedge \neg A)$

- $\neg(A \wedge \neg A)$
- 1.-  $\neg\neg(A \wedge \neg A)$
  - 2.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ DN 1
  - 3.-  $\neg\neg\neg(A \wedge \neg A)$  \_\_\_\_\_ Abs. 1-2
  - 4.-  $\neg(A \wedge \neg A)$  \_\_\_\_\_ DN 1-4

Principio de Tercio Excluido (PTE)  
 $A \vee \neg A$

- $\neg(A \vee \neg A)$
- 1.-  $\neg(A \vee \neg A)$
  - 2.-  $A$
  - 3.-  $A \vee \neg A$  \_\_\_\_\_ Ad 2
  - 4.-  $\neg(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg A)$  \_\_\_\_\_ Prod 1,3
  - 5.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 2-4
  - 6.-  $A \vee \neg A$  \_\_\_\_\_ Ad 5
  - 7.-  $\neg(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg A)$  \_\_\_\_\_ Prod 1, 6
  - 8.-  $\neg\neg(A \vee \neg A)$  \_\_\_\_\_ Abs 1-7
  - 9.-  $A \vee \neg A$  \_\_\_\_\_ DN

Ex Contradictione Quodlibet (ECQ)  
 $A \wedge \neg A$   


---

 $B$

- 1)  $A \wedge \neg A$   $\neg B$
- 2.-  $\neg B$
  - 3.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp 1
  - 4.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Simp 1
  - 5.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod 3,4
  - 6.-  $\neg\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs 2-5
  - 7.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN 6

## Reglas derivadas de la conjunción ( $\wedge$ )

Propiedad Conmutativa de la Conjunción (CC)

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$

$$\begin{array}{l} 1) A \wedge B \\ 2.- A \text{ _____} \text{Simp 1} \\ 3.- B \text{ _____} \text{Simp 1} \\ 4.- B \wedge A \text{ _____} \text{Prod 2,3} \end{array} \quad \vdash B \wedge A$$

$$\begin{array}{l} 1) B \wedge A \\ 2.- B \text{ _____} \text{Simp 1} \\ 3.- A \text{ _____} \text{Simp 1} \\ 4.- A \wedge B \text{ _____} \text{Prod 2,3} \end{array} \quad \vdash A \wedge B$$

Propiedad Asociativa de la Conjunción (AC)

$$\frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge (B \wedge C)}$$

$$\begin{array}{l} 1) (A \wedge B) \wedge C \\ 2.- A \wedge B \text{ _____} \text{Simp 1} \\ 3.- C \text{ _____} \text{Simp 1} \\ 4.- A \text{ _____} \text{Simp 2} \\ 5.- B \text{ _____} \text{Simp 2} \\ 6.- B \wedge C \text{ _____} \text{Prod 3,5} \\ 7.- A \wedge (B \wedge C) \text{ _____} \text{Prod 4,6} \end{array} \quad \vdash A \wedge (B \wedge C)$$

$$\begin{array}{l} 1) A \wedge (B \wedge C) \\ \text{(La prueba es semejante a la primera parte)} \end{array} \quad \vdash (A \wedge B) \wedge C$$

Propiedad Distributiva de la Conjunción (DC)

$$\frac{A \wedge (B \vee C)}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$

- 1)  $A \wedge (B \vee C)$  |-  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$   
 2.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp 1  
 3.-  $B \vee C$  \_\_\_\_\_ Simp 1  
 4.-  $B$   
 5.-  $A \wedge B$  \_\_\_\_\_ Prod 2,4  
 6.-  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Ad 5  
 7.-  $C$   
 8.-  $A \wedge C$  \_\_\_\_\_ Prod 2,7  
 9.-  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Ad 8  
 10.-  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Cas 3, 4-6, 7.9

- 1)  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  |-  $A \wedge (B \vee C)$   
 2.-  $A \wedge B$   
 3.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp 2  
 4.-  $B$  \_\_\_\_\_ Simp 2  
 5.-  $B \vee C$  \_\_\_\_\_ Ad 4  
 6.-  $A \wedge (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Prod 3,5  
 7.-  $A \wedge C$   
 8.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp 7  
 9.-  $C$  \_\_\_\_\_ Simp 7  
 10.-  $B \vee C$  \_\_\_\_\_ Ad 9  
 11.-  $A \wedge (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Prod 8, 10  
 12.-  $A \wedge (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Cas 1, 2-6, 7-11

Idempotencia de la Conjunción (IdC)

$$\frac{A \wedge A}{A}$$

- 1)  $A \wedge A$  |-  $A$   
 2.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp 1

- 1)  $A$  |-  $A \wedge A$   
 2.-  $\neg A$   
 3.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod 1,2  
 4.-  $\neg \neg A$  \_\_\_\_\_ Abs 2-3  
 5.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN 4  
 6.-  $A \wedge A$  \_\_\_\_\_ Prod 1,5

Absorción de la Conjunción (AbsC)

$$\frac{A \wedge (A \vee B)}{A}$$

- 1)  $A \wedge (A \vee B)$  |-  $A$   
 2.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp 1

- 1)  $A$  |-  $A \wedge (A \vee B)$   
 2.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad 1  
 3.-  $A \wedge (A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Prod 1, 2

Reglas derivadas demostradas - Felipe Garrido Bernabeu

Importación (Imp)

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{(A \wedge B) \rightarrow C}$$

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$   | $\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ |
| 2.- $A \wedge B$                       |                                     |
| 3.- $A$ _____                          | Simp 2                              |
| 4.- $B$ _____                          | Simp 2                              |
| 5.- $B \rightarrow C$ _____            | MP 1,3                              |
| 6.- $C$ _____                          | MP 4,5                              |
| 7.- $(A \wedge B) \rightarrow C$ _____ | TD 2-6                              |

Exportación (Exp)

$$\frac{(A \wedge B) \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

- |   |  |
|---|--|
| 1) $(A \wedge B) \rightarrow C$             | $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ |
| 2.- $A$                                     |  |
| 3.- $B$                                     |  |
| 4.- $A \wedge B$ _____                      | Prod 2,3                                 |
| 5.- $C$ _____                               | MP 1, 4                                  |
| 6.- $B \rightarrow C$ _____                 | TD 3-5                                   |
| 7.- $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ _____ | TD 2-6                                   |

**Reglas derivadas de la disyunción ( $\vee$ )**

Propiedad Conmutativa ( $\vee$ )

$$\frac{A \vee B}{\underline{\quad}}$$

$$B \vee A$$

1)  $A \vee B$

$\vdash B \vee A$

2.- A

3.-  $B \vee A$  \_\_\_\_\_ Ad. 2

4.- B

5.-  $B \vee A$  \_\_\_\_\_ Ad. 4

6.-  $B \vee A$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 2-3, 4-5

(En sentido inverso la prueba es semejante)

Propiedad asociativa ( $\vee$ )

$$\frac{(A \vee B) \vee C}{\underline{\quad}}$$

$$A \vee (B \vee C)$$

1)  $(A \vee B) \vee C$

$\vdash A \vee (B \vee C)$

2.-  $A \vee B$

3.- A

4.-  $A \vee (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Ad.3

5.- B

6.-  $B \vee C$  \_\_\_\_\_ Ad. 5

7.-  $A \vee (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Ad. 6

8.-  $A \vee (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Cas. 2, 3-4, 5-6

9.- C

10.-  $B \vee C$  \_\_\_\_\_ Ad. 8

11.-  $A \vee (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Ad. 9

12.-  $A \vee (B \vee C)$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 2-8, 9-11

(A la inversa la prueba es semejante)

Propiedad Distributiva ( $\vee$ )

$$\frac{A \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

- 1)  $A \vee (B \wedge C)$  |-  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$   
 2.- A  
 3.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad. 2  
 4.-  $A \vee C$  \_\_\_\_\_ Ad. 2  
 5.-  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$  \_\_\_\_\_ Prod. 3, 4  
 6.-  $B \wedge C$   
 7.- B \_\_\_\_\_ Simp. 6  
 8.- C \_\_\_\_\_ Simp. 6  
 9.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad. 7  
 10.-  $A \vee C$  \_\_\_\_\_ Ad. 8  
 11.-  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$  \_\_\_\_\_ Prod. 9, 10  
 12.-  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 2-5, 6-11

- 1)  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$  |-  $A \vee (B \wedge C)$   
 2.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ Simp. 1  
 3.-  $A \vee C$  \_\_\_\_\_ Simp. 2  
 4.- A  
 5.-  $A \vee (B \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Ad. 3  
 6.- B  
 7.- A  
 8.-  $A \vee (B \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Ad. 6  
 9.- C  
 10.-  $B \wedge C$  \_\_\_\_\_ Prod. 6,9  
 11.-  $A \vee (B \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Ad. 10  
 12.-  $A \vee (B \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Cas. 3, 7-8, 9-11  
 13.-  $A \vee (B \wedge C)$  \_\_\_\_\_ Cas. 2, 4-5, 6-12

Idempotencia de la disyunción (IdD)

$$\frac{A \vee A}{A}$$

De arriba hacia abajo: una prueba por casos, donde cada caso es exactamente igual a la prueba de la identidad.  
 De abajo hacia arriba: una simple adición

Absorción

$$\frac{A \vee (A \wedge B)}{A}$$

- 1)  $A \vee (A \wedge B)$  |- A  
 2.- A  
 3.-  $\neg A$   
 4.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod. 2,3  
 5.-  $\neg \neg A$  \_\_\_\_\_ Abs. 3-4  
 6.- A \_\_\_\_\_ DN, 5  
 7.-  $A \wedge B$   
 8.- A \_\_\_\_\_ Simp. 7  
 9.- A \_\_\_\_\_ Cas. 1, 2-6, 7-9

De abajo hacia arriba se resuelve mediante una simple adición.

Silogismo Disyuntivo 1 (SD<sub>1</sub>)

$A \vee B$   
 $\neg B$   


---

 $A$

- 1)  $A \vee B$  |-A  
 2)  $\neg B$   
 3.-  $A$   
 4.-  $\neg A$   
 5.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod. 3,4  
 6.-  $\neg\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-5  
 7.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN, 6  
 8.-  $B$   
 9.-  $\neg A$   
 10.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 2,8  
 11.-  $\neg\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs. 8-10  
 12.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN, 11  
 13.-  $A$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 3-7, 8-12

Silogismo Disyuntivo 2 (SD<sub>2</sub>)

$A \vee B$   
 $\neg A$   


---

 $B$

La prueba es semejante a la anterior.

Dilema Constructivo 1 (DilC<sub>1</sub>)

$A \vee B$   
 $A \rightarrow C$   
 $B \rightarrow C$   


---

 $C$

- 1)  $A \vee B$  |- C  
 2)  $A \rightarrow C$   
 3)  $B \rightarrow C$   
 4-  $A$   
 5.-  $C$  \_\_\_\_\_ MP 2, 4  
 6.-  $B$   
 7.-  $C$  \_\_\_\_\_ MP 3, 6  
 8.-  $C$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 4-5, 6-7

Dilema Constructivo 2 (DilC<sub>2</sub>)

$A \vee B$
$A \rightarrow C$
$B \rightarrow D$
$C \vee D$

- |  |                   |
|--|-------------------|
| 1) $A \vee B$                          | $\vdash C \vee D$ |
| 2) $A \rightarrow C$                   |                   |
| 3) $B \rightarrow D$                   |                   |
| 4.- $A$                                |                   |
| 5.- $C$ _____ MP 2, 4                  |                   |
| 6.- $C \vee D$ _____ Ad. 5             |                   |
| 7.- $B$                                |                   |
| 8.- $D$ _____ MP 3, 7                  |                   |
| 9.- $C \vee D$ _____ Ad. 8             |                   |
| 10.- $C \vee D$ _____ Cas. 1, 4-6, 7-9 |                   |

Dilema Destructivo 1 (DilD<sub>1</sub>)

$\neg A \vee \neg B$
$C \rightarrow A$
$C \rightarrow B$
$\neg C$

- |  |                 |
|--|-----------------|
| 1) $\neg A \vee \neg B$                | $\vdash \neg C$ |
| 2) $C \rightarrow A$                   |                 |
| 3) $C \rightarrow B$                   |                 |
| 4.- $\neg A$                           |                 |
| 5.- $C$                                |                 |
| 6.- $A$ _____ MP 2, 5                  |                 |
| 7.- $A \wedge \neg A$ _____ Prod. 4, 6 |                 |
| 8.- $\neg C$ _____ Abs. 5-7            |                 |
| 9.- $\neg B$                           |                 |
| 10.- $C$                               |                 |
| 11.- $B$ _____ MP 3, 10                |                 |
| 12.- $B \vee \neg B$ _____ Prod. 9, 11 |                 |
| 13.- $\neg C$ _____ Abs. 10-12         |                 |
| 14.- $\neg C$ _____ Cas. 1, 4-8, 9-13  |                 |

Dilema Destructivo 2 (DiD<sub>2</sub>)

$\neg A \vee \neg B$

$C \rightarrow A$

$D \rightarrow B$

---

$\neg C \vee \neg D$

- |                           |                    |  |
|---------------------------|--------------------|--|
| 1) $\neg A \vee \neg B$   |                    |  |
| 2) $C \rightarrow A$      |                    |  |
| 3) $D \rightarrow B$      |                    |  |
| 4.- $\neg A$              |                    |  |
| 5.- $C$                   |                    |  |
| 6.- $A$                   | MP 2, 5            |  |
| 7.- $A \wedge \neg A$     | Prod. 4, 6         |  |
| 8.- $\neg C$              | Abs. 5- 7          |  |
| 9.- $\neg C \vee \neg D$  | Ad. 8              |  |
| 10.- $\neg B$             |                    |  |
| 11.- $D$                  |                    |  |
| 12.- $B$                  | MP 3, 11           |  |
| 13.- $B \wedge \neg B$    | Prod. 10, 12       |  |
| 14.- $\neg D$             | Abs. 11-13         |  |
| 15.- $\neg C \vee \neg D$ | Ad. 14             |  |
| 16.- $\neg C \vee \neg D$ | Cas. 1, 4-9, 10-15 |  |
- | -  $\neg C \vee \neg D$

## Reglas de interdefinición

Definición del Implicador 1 (Df  $\rightarrow_1$ )

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg(A \wedge \neg B)}$$

<ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>A \rightarrow B</math></li> <li>2.- <math>A \wedge \neg B</math></li> <li>3.- <math>A</math> _____ Simp. 2</li> <li>4.- <math>\neg B</math> _____ Simp. 2</li> <li>5.- <math>B</math> _____ MP 1, 3</li> <li>6.- <math>B \wedge \neg B</math> _____ Prod. 4,5</li> <li>7.- <math>\neg(A \wedge \neg B)</math> _____ Abs. 2-6</li> </ol>	$\vdash \neg(A \wedge \neg B)$
---	--------------------------------

<ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\neg(A \wedge \neg B)</math></li> <li>2.- <math>A</math></li> <li>3.- <math>\neg B</math></li> <li>4.- <math>A \wedge \neg B</math> _____ Prod. 2,3</li> <li>5.- <math>\neg(A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg B)</math> _____ Prod. 1, 4</li> <li>6.- <math>\neg\neg B</math> _____ Abs. 3-5</li> <li>7.- <math>B</math> _____ DN 6</li> <li>8.- <math>A \rightarrow B</math> _____ TD 2-7</li> </ol>	$\vdash A \rightarrow B$
--	--------------------------

Definición del Implicador 2 (Df  $\rightarrow_2$ )  
 $A \rightarrow B$   
 $\hline \neg A \vee B$

$\vdash \neg A \vee B$

1)  $A \rightarrow B$   
 2.-  $\neg(\neg A \vee B)$   
 3.-  $A$   
 4.-  $\neg B$   
 5.-  $B$  \_\_\_\_\_ MP 1, 3  
 6.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 4,5  
 7.-  $\neg\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-6  
 8.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN, 7  
 9.-  $\neg A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad. 8  
 10.-  $\neg(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 2, 9  
 11.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs. 3-10  
 12.-  $\neg A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad. 11  
 13.-  $\neg(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 2, 12  
 14.-  $\neg\neg(\neg A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 2-13  
 15.-  $\neg A \vee B$  \_\_\_\_\_ DN, 14

$\vdash A \rightarrow B$

1)  $\neg A \vee B$   
 2.-  $\neg A$   
 3.-  $A$   
 4.-  $\neg B$   
 5.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod. 2,3  
 6.-  $\neg\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-5  
 7.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN, 6  
 8.-  $A \rightarrow B$  \_\_\_\_\_ TD 3-7  
 9.-  $B$   
 10.-  $A$   
 11.-  $\neg B$   
 12.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 9,11  
 13.-  $\neg\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 11-12  
 14.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN 13  
 15.-  $A \rightarrow B$  \_\_\_\_\_ TD 10-14  
 16.-  $A \rightarrow B$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 2-8, 9-15

Definición de la conjunción 1 (Df  $\wedge_1$ )

$$\frac{A \wedge B}{\neg(A \rightarrow \neg B)}$$

- 1)  $A \wedge B$
- 2.-  $A \rightarrow \neg B$
- 3.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp. 1
- 4.-  $B$  \_\_\_\_\_
- 5.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_ MP 2, 3
- 6.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 4,5
- 7.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-6
- 8.-  $B$  \_\_\_\_\_ Simp. 1
- 9.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 7,8
- 10.-  $\neg(A \rightarrow \neg B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 2-9

$\vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$

- 1)  $\neg(A \rightarrow \neg B)$
- 2.-  $\neg(A \wedge B)$
- 3.-  $A$  \_\_\_\_\_
- 4.-  $B$  \_\_\_\_\_
- 5.-  $A \wedge B$  \_\_\_\_\_ Prod. 3,4
- 6.-  $\neg(A \wedge B) \wedge (A \wedge B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 2, 5
- 7.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-6
- 8.-  $A \rightarrow \neg B$  \_\_\_\_\_ TD 3-7
- 9.-  $\neg(A \rightarrow \neg B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 1, 9
- 10  $\neg(A \wedge B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 2-9
- 11  $A \wedge B$  \_\_\_\_\_ DN 10

$\vdash A \wedge B$

Definición de la conjunción 2 (Df  $\wedge_2$ )

$$\frac{A \wedge B}{\neg(\neg A \vee \neg B)}$$

- 1)  $A \wedge B$
- 2.-  $\neg A \vee \neg B$
- 3.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_
- 4.-  $\neg A \vee \neg B$  \_\_\_\_\_
- 5.-  $A$  \_\_\_\_\_ Simp. 1
- 6.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod. 3, 5
- 7.-  $\neg(\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-6
- 8.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_
- 9.-  $\neg A \vee \neg B$  \_\_\_\_\_
- 10.-  $B$  \_\_\_\_\_ Simp. 1
- 11.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 8-10
- 12.-  $\neg(\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 9-11
- 13.-  $\neg(\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Cas. 2, 3-7, 8-12
- 14.-  $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 2, 13
- 15.-  $\neg(\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 2- 14

$\vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

- 1)  $\neg(\neg A \vee \neg B)$
- 2.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_
- 3.-  $\neg A \vee \neg B$  \_\_\_\_\_ Ad. 2
- 4.-  $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 1, 3
- 5.-  $\neg\neg A$  \_\_\_\_\_ Abs. 2- 4
- 6.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN
- 7.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_
- 8.-  $\neg A \vee \neg B$  \_\_\_\_\_ Ad. 7
- 9.-  $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 1, 8
- 10.-  $\neg\neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 7-9
- 11.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN 10
- 12.-  $A \wedge B$  \_\_\_\_\_ Prod. 6,11

$\vdash A \wedge B$

Definición de la disyunción 1 (Df  $\vee_1$ )  

$$\frac{A \vee B}{\neg A \rightarrow B}$$

$\vdash \neg A \rightarrow B$

1)  $A \vee B$   
 2.-  $\neg A$   
 3.-  $A$   
 4.-  $\neg B$   
 5.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod. 2,3  
 6.-  $\neg \neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-5  
 7.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN, 6  
 8.-  $B$   
 9.-  $\neg B$   
 10.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 8,9  
 11.-  $\neg \neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 9-10  
 12.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN, 11  
 13.-  $B$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 3-7, 8-12  
 14.-  $\neg A \rightarrow B$  \_\_\_\_\_ TD 2-13

$\vdash A \vee B$

1)  $\neg A \rightarrow B$   
 2.-  $\neg(A \vee B)$   
 3.-  $\neg A$   
 5.-  $B$  \_\_\_\_\_ MP 1, 3  
 6.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad. 5  
 7.-  $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 2, 6  
 8.-  $\neg \neg A$  \_\_\_\_\_ Abs. 3-7  
 9.-  $A$  \_\_\_\_\_ DN, 8  
 10.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ Ad. 9  
 11.-  $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Prod. 2, 10  
 12.-  $\neg \neg(A \vee B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 2-11  
 13.-  $A \vee B$  \_\_\_\_\_ DN, 12

Definición de la disyunción 2 (Df  $\vee_2$ )  

$$\frac{A \vee B}{\neg(\neg A \wedge \neg B)}$$

$\vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1)  $A \vee B$   
 2.-  $\neg A \wedge \neg B$   
 3.-  $A$   
 4.-  $\neg B$   
 5.-  $\neg A$  \_\_\_\_\_ Simp. 2  
 6.-  $A \wedge \neg A$  \_\_\_\_\_ Prod. 3, 5  
 7.-  $\neg \neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 4-6  
 8.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN, 7  
 9.-  $B$   
 10.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_  
 11.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 9, 10  
 12.-  $\neg \neg B$  \_\_\_\_\_ Abs. 10-11  
 13.-  $B$  \_\_\_\_\_ DN, 12  
 14.-  $B$  \_\_\_\_\_ Cas. 1, 3-8, 9-13  
 15.-  $\neg B$  \_\_\_\_\_ Simp. 2  
 16.-  $B \wedge \neg B$  \_\_\_\_\_ Prod. 14, 15  
 17.-  $\neg(\neg A \wedge \neg B)$  \_\_\_\_\_ Abs. 2-16

Reglas derivadas demostradas - Felipe Garrido Bernabeu

- 1)  $\neg(\neg A \wedge \neg B)$   $\vdash A \vee B$   
 2.-  $\neg(A \vee B)$   
 3.-  $\neg A$   
 4.-  $\neg B$   
 5.-  $\neg A \wedge \neg B$  Prod. 2,3  
 6.-  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$  Prod. 1, 4  
 7.-  $\neg\neg B$  Abs. 3-5  
 8.-  $B$  DN, 6  
 9.-  $A \vee B$  Ad. 8  
 10.-  $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)$  Prod. 2, 9  
 11.-  $\neg\neg A$  Abs. 3-10  
 12.-  $A$  DN, 11  
 13.-  $A \vee B$  Ad. 12  
 14.-  $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)$  Prod. 2, 13  
 15.-  $\neg\neg(A \vee B)$  Abs. 2-14  
 16.-  $A \vee B$  DN, 15

Ley de Morgan 1 (DM<sub>1</sub>)  
 $\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$

- 1)  $\neg(A \wedge B)$   $\vdash \neg A \vee \neg B$   
 2.-  $\neg(\neg A \vee \neg B)$   
 3.-  $A$   
 4.-  $B$   
 5.-  $A \wedge B$  Prod. 2,3  
 6.-  $\neg(A \wedge B) \wedge (A \wedge B)$  Prod. 1, 4  
 7.-  $\neg B$  Abs. 4-6  
 8.-  $\neg A \vee \neg B$  Ad. 7  
 9.-  $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$  Prod. 2, 8  
 10.-  $\neg A$  Abs. 3-9  
 11.-  $\neg A \vee \neg B$  Ad. 10  
 12.-  $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$  Prod. 2, 11  
 13.-  $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$  Abs. 2-12  
 14.-  $\neg A \vee \neg B$  DN, 13

- 1)  $\neg A \vee \neg B$   $\vdash \neg(A \wedge B)$   
 2.-  $\neg A$   
 3.-  $A \wedge B$   
 4.-  $A$  Simp. 3  
 5.-  $A \wedge \neg A$  Prod. 2,4  
 6.-  $\neg(A \wedge B)$  Abs. 3-5  
 7.-  $\neg B$   
 8.-  $A \wedge B$   
 9.-  $B$  Simp, 8  
 10.-  $B \wedge \neg B$  Prod. 7, 9  
 11.-  $\neg(A \wedge B)$  Abs. 8-10  
 12.-  $\neg(A \wedge B)$  Cas. 1, 2-6, 7-11

Ley de Morgan 2 (DM<sub>2</sub>)

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

<p>1) <math>\neg(A \vee B)</math></p> <p>2.- A</p> <p>3.- <math>A \vee B</math> _____ Ad. 2</p> <p>4.- <math>\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)</math> _____ Prod. 1, 3</p> <p>5.- <math>\neg A</math> _____ Abs. 2-4</p> <p>6.- B</p> <p>7.- <math>A \vee B</math> _____ Ad. 6</p> <p>8.- <math>\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)</math> _____ Prod. 1, 7</p> <p>9.- <math>\neg B</math> _____ Abs. 6-8</p> <p>10 <math>\neg A \wedge \neg B</math> _____ Prod. 5, 9</p>	<p><math>\vdash \neg A \wedge \neg B</math></p>
--	---

<p>1) <math>\neg A \wedge \neg B</math></p> <p>2.- <math>A \vee B</math></p> <p>3.- A</p> <p>4.- <math>A \vee B</math></p> <p>5.- <math>\neg A</math> _____ Simp. 1</p> <p>6.- <math>A \wedge \neg A</math> _____ Prod. 3, 5</p> <p>7.- <math>\neg(A \vee B)</math> _____ Abs. 4-6</p> <p>8.- B</p> <p>9.- <math>A \vee B</math></p> <p>10.- <math>\neg B</math> _____ Simp. 1</p> <p>11.- <math>B \wedge \neg B</math> _____ Prod. 8, 10</p> <p>12.- <math>\neg(A \vee B)</math> _____ Abs. 9-11</p> <p>13.- <math>\neg(A \vee B)</math> _____ Cas. 2, 3-7, 8-12</p> <p>14.- <math>\neg(A \vee B) \wedge (A \vee B)</math> _____ Prod. 2, 13</p> <p>15.- <math>\neg(A \vee B)</math> _____ Abs. 2-14</p>	<p><math>\vdash \neg(A \vee B)</math></p>
---	---